1. Ein Produktionsbatch von 100'000 Artikeln wird in Kisten zu je 10 Artikeln verpackt. Aus Erfahrung weiss man, dass 10% der Artikel (also 10'000 Artikel) defekt sind, und dass Defekte völlig unabhängig voneinander auftreten. Man wählt zufällig eine der 10'000 Kisten aus.

   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p_2, dass sich darin genau zwei unbrauchbare Artikel befinden? (Hinweis: Stichprobe)

   (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit q, dass sich in der Kiste höchstens ein unbrauchbarer Artikel befindet?

   (c) Näherungsweise kann man das Verpacken dieser einen Kiste als 10 unabhängige Erfolg-Nichterfolg-Experimente interpretieren, ähnlich wie in Beispiel 3.33 Seite 144 (Sachs). Finde die Erfolgswahrscheinlichkeit und berechne näherungsweise nochmals die Wahrscheinlichkeit q, dass sich in der Kiste höchstens ein unbrauchbarer Artikel befindet.

   Lösung

   (a) Dies ist eine Stichprobe aus N=100'000 vom Umfang 10, wobei M=10'000 das Merkmal besitzen. Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass genau m=2 der 10 Artikel in der Stichprobe das Merkmal besitzen.

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10'000}{2}\binom{90'000}{8}}{\binom{100'000}{10}} \\
&= \frac{\frac{10'000*9'999}{2!} \cdot \frac{90'000*89'999*89'998*89'997*89'996*89'995*89'994*89'993}{8!}}{\frac{100'000*99'999*99'998*99'997*99'996*99'995*99'994*99'993*99'992*99'991}{10!}} = 0.1937.
\end{aligned}$$

   (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit q, dass sich in der Kiste höchstens ein unbrauchbarer Artikel befindet? Hier addiert man die Summen der Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 analog wie oben, mit $m = 0$ und $m = 1$:

$$\begin{aligned}
q &= p_0 + p_1 = \frac{\binom{M}{0}\binom{N-M}{n-0}}{\binom{N}{n}} + \frac{\binom{M}{1}\binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10'000}{0}\binom{90'000}{10}}{\binom{100'000}{10}} + \frac{\binom{10'000}{1}\binom{90'000}{9}}{\binom{100'000}{10}} \\
&= \frac{1 \cdot \frac{90'000*89'999*89'998*89'997*89'996*89'995*89'994*89'993*89'992*89'991}{10!}}{\frac{100'000*99'999*99'998*99'997*99'996*99'995*99'994*99'993*99'992*99'991}{10!}} \\
&\quad + \frac{10'000 \cdot \frac{90'000*89'999*89'998*89'997*89'996*89'995*89'994*89'993*89'992}{9!}}{\frac{100'000*99'999*99'998*99'997*99'996*99'995*99'994*99'993*99'992*99'991}{10!}} \\
&= 0.3487 + 0.3874 = 0.7361.
\end{aligned}$$

   (c) Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $p = M/N = 10'000/100'000 = 0.1$ Damit wird

$$q \simeq \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} + \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 = (9/10)^{10} + 10*0.1*(9/10)^9 = 0.3487 + 0.3874 = 0.7361$$

   genau wie vorher.

2. Vergleiche Aufgabe 3.27 (Sachs)

   Beim Lotto werden 6 Zahlen aus 49 ausgewählt (wir beachten hier die Zusatzzahl nicht).

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei vorgegebene Zahlen gezogen werden (z.B., dass die Zahlen 1,2,3 gezogen werden)?

Lösung

Dies ist eine Stichprobe ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Die Verteilung ist also Hypergeometrisch mit $N = 49$, $M = 3$, $n = 6$, $m = 3$.

$$p = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{3}\binom{46}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{1 \cdot \frac{46*45*44}{3!}}{\frac{49*48*47*46*45*44}{6!}} = \frac{6*5*4}{49*48*47} = 0.0011.$$

Zweiter Lösungsweg:

Man rechnet die Anzahl Möglichkeiten, 3 aus 6 auszulesen (nämlich die Anzahl Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge die gewünschten Zahlen gezogen werden), und multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, die gewünschten und ungewünschten Zahlen in dieser Reihenfolge zu ziehen:

$6*5*4/(3*2*1)*(46/49*45/48*44/47)*(3/46*2/45*1/44) = 6*5*4/(49*48*/47) = 0.0011$