1. (3 Punkte) Ein System besteht aus zwei Bauteilen. Die Wahrscheinlichkeit p1, dass Bauteil 1 ausfällt ist 0.5; die Wahrscheinlichkeit p2, dass Bauteil 2 ausfällt ist 0.25. Die Bauteil fallen unabhängig voneinander aus.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

   (a) beide Bauteile ausfallen. (1 Punkt)
   (b) ein Bauteil ausfällt. (1 Punkt)
   (c) kein Bauteil ausfällt. (1 Punkt)

   Lösung:

   Ereignisraum $\Omega = \{(1;1), (1;0), (0;1), (0;0)\}$

   Dabei bedeuten:

   - (1;1) = Bauteil 1 und Bauteil 2 fallen aus
   - (1;0) = Bauteil 1 fällt aus, Bauteil 2 nicht
   - (0;1) = Bauteil 1 fällt nicht aus, Bauteil 2 fällt aus
   - (0;0) = beide Bauteile fallen nicht aus

   Wir kennen die folgenden Wahrscheinlichkeiten

   - Wahrscheinlichkeit, dass Bauteil 1 ausfällt : Das Ereignis ist $B1 = \{(1;1), (1;0)\}$ mit $P[B1] = p1 = 0.5$.
   - Wahrscheinlichkeit, dass Bauteil 1 nicht ausfällt: Das Ereignis ist $\overline{B1} = \{(0;1), (0;0)\}$ mit $P[\overline{B1}] = 1 - p1 = 0.5$
   - Wahrscheinlichkeit, dass Bauteil 2 ausfällt : Das Ereignis ist $B2 = \{(1;1), (0;1)\}$ mit $P[B2] = p2 = 0.25$.
   - Wahrscheinlichkeit, dass Bauteil 2 nicht ausfällt: Das Ereignis ist $\overline{B2} = \{(1;0), (0;0)\}$ mit $P[\overline{B2}] = 1 - p2 = 0.75$

   Daraus berechnen wir die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mittels Unabhängigkeit wie folgt:

   (a) Wahrscheinlichkeit, dass beide Bauteile ausfallen:
   $P[B1 \cap B2] = P[B1] \cdot P[B2] = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$.

   (c)! Wahrscheinlichkeit, dass kein Bauteil ausfällt.
   $P[\overline{B1} \cap \overline{B2}] = P[\overline{B1}] \cdot P[\overline{B2}] = 0.5 \cdot 0.75 = 0.375$.

   (b) Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil ausfällt:
   Dies ist die restliche Wahrscheinlichkeit, also 1-0.125-0.375=0.5.
   Man kann aber auch direkt rechnen, mit etwas mehr Aufwand:
   $P[(B1 \cap \overline{B2}) \cup (\overline{B1} \cap B2)] = P[B1 \cap \overline{B2}] + P[\overline{B1} \cap B2] = p1(1 - p2) + (1 - p1)p2 = 0.5$

2. In einer Firma kommen alle Leute entweder mit dem Auto oder mit öffentlichen Verkehrsmitteln (Fussgänger eingeschlossen) zur Arbeit. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Arbeitsweg mit den öffentlichen Verkehr zurücklegt, ist 80%. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die den Arbeitsweg mit dem öffentlichen Verkehr zurücklegt, ein Auto besitzt, ist 50%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die ein Auto besitzt, den Arbeitsweg trotzdem mit den öffentlichen Verkehr zurücklegt? (5 Punkte)

   Lösung:

Sei A das Ereignis, dass eine Person ein Auto besitzt, und OV, dass sie den öffentlichen Verkehr benützt.

Folgendes ist gegeben: $P[OV] = 80\%$. Ausserdem $P[A|OV] = 50\%$ (die Bedingung oder Teilmenge ist, dass wir nur die Personen betrachten, die den öffentlichen Verkehr benutzen.)

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die ein Auto besitzt, trotzdem den Arbeitsweg mit den öffentlichen Verkehr zurücklegt, also $P(OV|A)$.

1. Weg: Via Bayes.

$$P[OV|A] = \frac{P[A|OV] \cdot P[OV]}{P[A]}$$

Dazu benötigen wir zuerst $P[A]$, was wir via totale Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$P[A] = P[A|OV]P[OV] + P[A|\overline{OV}]P[\overline{OV}] = 0.5 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.2 = 0.6$$

Dabei haben wir verwendet, dass eine Person, die nicht mit den ÖV kommt, notwendigerweise ein Auto besitzen muss: $P[A|\overline{OV}] = 1$.

Nun bekommen wir

$$P[OV|A] = \frac{P[A|OV] \cdot P[OV]}{P[A]} = \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.6} = 0.4/0.6 = 2/3 = 66\%$$

2. Weg Direkt per Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

$$P[OV|A] = \frac{P[OV \cap A]}{P[A]}$$

Wir benötigen dazu $P[OV \cap A]$ was sich am einfachsten über den Multiplikationssatz berechnen lässt:

$$P[OV \cap A] = P[A|OV] \cdot P[OV]$$

Damit sind wir wieder bei Bayes.

3. Weg: Mit einer Kontingenztabelle. Diese sieht wie folgt aus

	OV	$\overline{OV}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			

Nehmen wir ein Gesamttotal von 100 Personen an. Also kommen 80 Leute mit OV, 20 kommen nicht mit OV.

	OV	$\overline{OV}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total	80	20	100

Weiter besitzen 50% der 80 Leute, die mit OV kommen, ein Auto; dies sind 40 Leute.

	OV	$\overline{OV}$	Total
A	40		
$\overline{A}$			
Total	80	20	100

Von den 80 Leuten, die mit OV kommen, besitzen also 40 kein Auto:

	OV	$\overline{OV}$	Total
A	40		
$\overline{A}$	40		
Total	80	20	100

Schliesslich wissen wir, dass es unmöglich ist, kein Auto zu haben und nicht mit OV zu kommen:

	OV	$\overline{OV}$	Total
A	40		
$\overline{A}$	40	0	
Total	80	20	100

Nun lässt sich die Tabelle leicht vervollständigen:

	OV	$\overline{OV}$	Total
A	40	20	60
$\overline{A}$	40	0	40
Total	80	20	100

Nun kann man die gesuchte Wahrscheinlichkeit leicht ablesen:

$$P[OV|A] \quad = \quad \frac{\text{Anzahl Autobesitzer, die OV benutzen}}{\text{Anzahl Autobesitzer}} = \frac{P[OV \cap A]}{P[A]} = \frac{40}{60} = 2/3 = 66\%.$$

Dieser dritte Weg ist vielleicht der übersichtlichste. Man beachte aber, dass man auch hier $P[A]$ berechnen muss. Hier erfolgt dies über eine Tabelle, während im ersten Weg die totalen Wahrscheinlichkeit benutzt wird.

3. (10 Punkte) Aus insgesamt 50 Studierenden studieren 10 WIW, 20 WINFO und 20 INFO. Aus den WIW Studierenden besuchen 50% die Mathematik. Aus den anderen Studierenden besuchen 40% die Mathematik. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

- A = studiert WIW
- B = besucht die Mathematik

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und drücken Sie diese in "normaler" Sprache (wie unten) aus (hier bezeichnet B^c das Komplement von B).

i. $P(A)$
ii. $P(B|A)$
iii. $P(B|A^c)$
iv. $P(B^c)$

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und drücken Sie diese in "mathematischer" Sprache (wie oben) aus.

i. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden WIW nicht studiert.
ii. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden die Mathematik besucht.
iii. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden WIW studiert und die Mathematik besucht.
iv. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden WIW studiert oder die Mathematik besucht.

(c) (2 Punkte) Anhand vom Bayes' Theorem berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden, die die Mathematik besuchen, WIW studiert.

Lösung

(a) (4 Punkte)

i. $P(A) = \frac{10}{50} = 0.2$
ii. $P(B|A) = 50\% = 0.5$ gemäss Angaben
iii. $P(B|A^c) = 40\% = 0.4$ gemäss Angaben
iv. $P(B^c) = 1 - P(B)$.
Wir berechnen zuerst $P(B)$ mittels dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit:
$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.5 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.1 + 0.32 = 0.42$
Also ist $P(B^c) = 1 - P(B) = 0.58$

(b) (4 Punkte)

i. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden WIW nicht studiert.
$P(A^c) = 1 - P(A) = 0.8$
ii. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden die Mathematik besucht.
$P(B) = 0.42$ (siehe oben)
iii. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden WIW studiert und die Mathematik besucht.
$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$.
iv. Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden WIW studiert oder die Mathematik besucht.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.42 - 0.1 = 0.52$.

(c) (2 Punkte) Anhand vom Bayes' Theorem berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine(r) aus den Studierenden, die die Mathematik besuchen, WIW studiert.
$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = 0.5 \cdot 0.2/0.42 = 0.238$.

4. (5 Punkte) Die Wahrscheinlichkeit, eine leitende Stelle innezuhaben ist 10%. Von denjenigen, die eine leitende Stelle innehaben, haben 60% promoviert. Von denjenigen, die keine leitende Stelle innehaben, haben 40% promoviert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine promovierte Person eine leitende Stelle innehat?

Lösung

Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

- A = promoviert,
- B = leitende Stelle.

Wir wissen, $P(B) = 0.1$, $P(A|B) = 0.6$, $P(A|B^c) = 0.4$.

Gefragt ist $P(B|A)$. Mittels Bayes und Totaler Wahrscheinlichkeit finden wir

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} = \frac{0.6 \cdot 0.1}{0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.9} = 0.143$$

5. Ein Online-Shop funktioniert grob wie folgt: Ein Kunde sieht das Angebot durch; er legt die interessanten Dinge in den Einkaufskorb (panier, carrello); er kann Dinge auch wieder aus dem Einkaufskorb entfernen. Er kann zu jedem Zeitpunkt weitersuchen, die Dinge in seinem Einkaufskorb kaufen oder den Shop verlassen.

   Es wird eine Erhebung ausgeführt. Unter den Kunden, die während des Besuchs mindestens einmal etwas in den Einkaufskorb legen, kaufen 40% etwas. Ausserdem, 80% aller Kunden kaufen nichts.

   Das Ereignis, dass ein Kunde etwas kauft, wird mit K bezeichnet, das Ereignis, dass er während des Besuchs mindestens einmal etwas in seinen Einkaufskorb legt, mit E.

   (a) (2 Punkte) Aus den Angaben lassen sich durch Überlegen die Wahrscheinlichkeiten $p = P[K|E^c]$ und $q = P[E|K]$ bestimmen. Geben Sie diese an.
   Lösung:
   $P[K|E^c] = 0$ denn man kann nicht kaufen, ohne in den Korb zu legen.
   $P[E|K] = 1$ aus demselben Grund.

   (b) Füllen Sie die Kontigenztabelle aus. Wiederum lassen sich Teile der Tabelle durch Überlegen wie in (a) ausfüllen.

	K (kauft)	K^c (kauft nicht)	Total
E (legt etwas in Einkaufskorb)			
E^c (legt nichts in Einkaufskorb)			
Total			

   Lösung: Aus den Angaben weiss man

	K (kauft)	K^c (kauft nicht)	Total
E (legt etwas in Einkaufskorb)			
E^c (legt nichts in Einkaufskorb)			
Total	20	80	100

   Durch Überlegen

	K (kauft)	K^c (kauft nicht)	Total
E (legt etwas in Einkaufskorb)			
E^c (legt nichts in Einkaufskorb)	0		
Total	20	80	100

Also

	K (kauft)	K^c (kauft nicht)	Total
E (legt etwas in Einkaufskorb)	20		
E^c (legt nichts in Einkaufskorb)	0		
Total	20	80	100

Die eben gefundenen 20 in $E \cap K$ entsprechen den 40% von E, die etwas in den Korb legen. Also sind im ganzen 50 in E, also 50 die etwas in den Korb legen.

	K (kauft)	K^c (kauft nicht)	Total
E (legt etwas in Einkaufskorb)	20		50
E^c (legt nichts in Einkaufskorb)	0		
Total	20	80	100

Der Rest ist einfach:

	K (kauft)	K^c (kauft nicht)	Total
E (legt etwas in Einkaufskorb)	20	30	50
E^c (legt nichts in Einkaufskorb)	0	50	50
Total	20	80	100