Dr. Rudolf Riedi
HTA-FR, 2017-18

# Statistik
## Serie 1A: Lösung

1. (a) Logarithmisches Gesetz

**Aufgabe**

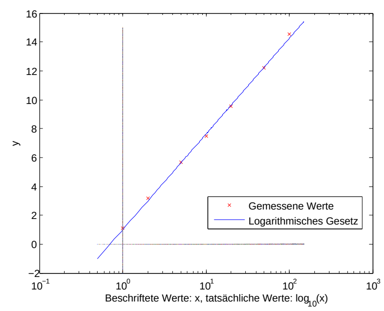
Gegeben sind die folgenden Punkte (siehe Figur unten)

| $x$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10}(x)$ | 0 | 0.3010 | 0.6990 | 1.0000 | 1.3010 | 1.6990 | 2.0000 |
| y | 1.1101 | 3.1544 | 5.6524 | 7.4947 | 9.5696 | 12.1816 | 14.5228 |

i. Schätzen Sie Basis und Offset eines Logarithmischen Gesetzes.

**Antwort** Die Regressionsgerade hat die Steigung $m = 6.6178$ und den Offset $c = 1.0515$. Mittels der Formel $m = \frac{1}{\log_{10}(b)}$ erhalten wir $b = 10^{1/m} = 1.4161$.

(Zur Kontrolle: die Daten wurden aus dem Log-Gesetz mit $b = \sqrt{2} = 1.414$ und $c = 1$ konstruiert, indem kleine Ablese- oder Messfehler zu den korrekten Daten addiert wurden.)




ii. Wie gut gilt das Gesetz (praktisch perfekt, sehr gut, recht gut, nicht vertrauenswürdig, schlecht)? Beachten Sie: es geht nicht darum, wie gut Sie Basis und Offset schätzen, sondern wie gut die Daten einem Logarithmischen Gesetz folgen.

**Antwort** Das Gesetz gilt praktisch perfekt denn der Korrelationskoeffizient beträgt $\rho = 0.999'6$, also praktisch 1.

iii. Wie können Sie die Basis $d$ des Semi-Log-Plots bestimmen, falls sie nicht bekannt ist?

**Antwort**

Man wählt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ auf der horizontalen Axe, sagen wir zum Beispiel $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Die Bezeichnung auf der Axe des Semi-Log Papiers besagt zwar $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$ aber in Tat und Wahrheit entsprechen die Positionen auf der Axe $\log_d(x_1)$ und $\log_d(x_2)$.

Man misst die tatsächliche Differenz $h$ der Positionen auf der horizontalen Axe zwischen den Markierungen $x_1$ und $x_2$, also

$$h = \log_d(x_2) - \log_d(x_1) = \log_d(x_2/x_1).$$

Daraus ergibt sich die unbekannte Basis

$$d^h = \frac{x_2}{x_1} \qquad \text{oder} \qquad d = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/h}$$

Da $d$ meist entweder 2 oder 10 beträgt, lässt sich der richtige Wert leicht bestimmen.

Zusatz: Setzt man dies ein in die Formel für die Basis des Logarithmischen Gesetzes, also in die Formel $b = d^{1/m}$, die man schätzen will, so ergibt sich

$$b = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{hm}}$$

In dieser Formel kommt dann die unbekannte Basis $d$ des Semi-Log Papiers gar nicht mehr vor. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, indem man bemerkt, dass die Steigung $m$ geschätzt werden könnte aus den Werten $x_1$ und $x_2$ mit ihren zugeordneten $y$-Werten, also $y_1$ und $y_2$: die Steigung wäre ca. $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)/h$. Mit anderen Worten:

$$b = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_2 - y_1}}.$$

Nun kommt auch die Steigung $m$, die man zwar mit etwas Aufwand aber doch mit verlässlichen statistischen Hilfsmitteln errechnet hat, auch nicht mehr vor.
Wir haben also schlussendlich eine einfache kurze Methode gefunden, um die Basis $b$ zu schätzen. Da die Schätzung von $b$ jetzt aber nur noch auf zwei Punkten $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ beruht, ist sie nicht so zuverlässlich wie das statistisch geschätzte $m$, die mehrere Punkte berücksichtigt.

(b) Potenzgesetz

**Aufgabe**

Gegeben sind die folgenden Punkte (gemessen aus einem Log-Log Graphen)

| $x$ | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log_d(x)$ | -1.0000 | -0.6990 | -0.3010 | 0 | 0.3010 | 0.6990 | 1.0000 |
| $\log_d(y)$ | -2.6825 | -1.9303 | -1.1206 | -0.6265 | 0.0216 | 0.6793 | 1.2831 |

Es wird ein Potenzgesetz vermutet. Schätzen Sie den Exponenten $b$ dieses Potenzgesetzes.

Wie gut folgen die Daten dem Gesetz (praktisch perfekt, sehr gut, recht gut, nicht vertrauenswürdig, schlecht)?

**Antworten**

Die Regressionsgerade der log(x) und log(y) - Daten hat die Steigung $m = b = 1.9420$ und den Offset $q = -0.6251$. Daraus berechnet sich der Faktor als: $c = 10^q = 0.23707$.

Zur Kontrolle: Die Daten wurden aus dem Potenzgesetz $y = 0.25 * x^2$, also mit Exponent $b = 2$ und Faktor $c = 0.25$ gewonnen, und mit kleinen Ablesefehlern versehen.

Die Daten folgendem dem Gesetz praktisch perfekt, da der Korrelationskoeffizient $r = 0.998'7$ praktisch 1 beträgt.