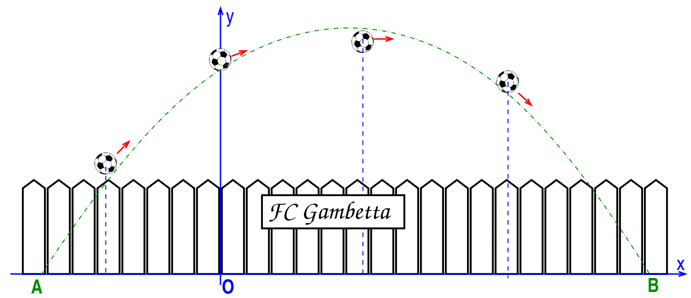
Dr. Rudolf Riedi
HEIA-FR, 2017-18

Intro Recherche Opérationnelle
Corrigé 9

29. L'observateur au point O regarde vers le terrain de foot de "FC Gambetta" où s'entraine en ce moment l'équipe des juniors. Par dessus de l'enclos, il voit uniquement un ballon tiré, pour lequel il relève sa position (x_i, y_i) dans quatre instants $i = 1, \ldots, 4$.

Ses mesures sont comme suit:

mesure i	1	2	3	4
x_i [m]	-1	0	1	2
y_i [m]	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	4	2



La balistique nous dit que la trajectoire du ballon est approximativement une parabole, ie. les x et y devraient théoriquement être reliés par la relation $y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

a) Utilisez la méthode des moindres carrés (la régression linéaire) pour trouver les paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui approchent au mieux la trajectoire du ballon.

b) Servez-vous de ce modèle pour calculer la position x_A du tireur au point A et x_B de sa cible au point B.

Réponse: Condition d'interpolation: $y(x_i) = y_i = a\,x_i^2 + b\,x_i + c$, $i = 1, \ldots, 4$:

Les observations amènent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} a - b + c &= 3/2 \\ c &= 7/2 \\ a + b + c &= 4 \\ 4a + 2b + c &= 2 \end{aligned}$$

En écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Les équations normales deviennent:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad , \qquad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 13/2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Solution du problème des moindres carrés:

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} (A \vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6/5 \\ 73/20 \end{pmatrix}$$

ie. la courbe balistique approché:

$$y(x) = -x^2 + \frac{6}{5} x + \frac{73}{20}$$

Positions x_A et x_B sont les zéros du $y(x)$:

$$x_{A,B} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{401}}{10},$$

ie. $x_A \approx -1.4$ et $x_B \approx 2.6$.

30. Afin d'étudier les performances d'un avion au décollage, on a mesuré aux instants t_i sa position d_i par rapport au début de la piste:

t_i [s]	1	3	6	9	12
d_i [m]	8	62	222	471	809

En supposant que l'accélération de l'avion est constante (la pousée des moteurs est constante et $F = m \cdot a$), le modèle pour la position est du type $dsd(t) = \alpha + \beta\, t + \gamma\, t^2$.

a) Déterminez le meilleur ajustement du modèle aux données, au sens des moindres carrés.

Les observations amènent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 8 \\ \alpha + 3\beta + 9\gamma &= 62 \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma &= 222 \\ \alpha + 9\beta + 81\gamma &= 471 \\ \alpha + 12\beta + 144\gamma &= 809 \end{aligned}$$

En écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 9 & 81 \\ 1 & 12 & 144 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 62 \\ 222 \\ 471 \\ 809 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Les équations normales deviennent:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 31 & 271 \\ 31 & 271 & 2701 \\ 271 & 2701 & 28675 \end{pmatrix} \quad , \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1572 \\ 15473 \\ 163'205 \end{pmatrix}$$

Solution du problème des moindres carrés:

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} (A \vec{b}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1993/364 \\ 2903/370 \\ 1176/235 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5.473 \\ 7.8459 \\ 5.0043 \end{pmatrix}$$

b) Estimez la vitesse de l'avion à l'instant $t = 5$ secondes. La vitesse est une dérivée de position $d(t)$ par rapport au temps t:

$$v(t) = (\alpha + \beta t + \gamma t^2)' = \beta + 2\gamma t$$

Alors

$$v(5) = \frac{2903}{370} + 2\frac{1176}{235} \cdot 5 = \frac{15051}{260} \approx 57.8885[m/s]$$

c) Déterminez la pousée des moteurs (force F [kN]), sachant que l'avion pèse au décollage 10 tonnes. L'accélération $a(t)$ est la deuxième dérivée de $d(t)$ par rapport au temps t:

$$a(t) = 2\gamma = 10.0085[m/s^2]$$
$$F = ma = 100'085[kN]$$

pour $m = 10'000$ [kg].

31. Un site naturel a été pollué en 1950 par hautes doses du pesticide DDT (interdit dans les années 1970 pour sa toxicité). Pendant des décennies après l'accident, on mesure sur le site pollué des concentrations y_i du DDT dans le sol (en milligrammes du DDT par gramme du sol pollué):

année	1960	1970	1980	1990	2000	2010
y_i [mg/g]	63	39	25	15	10	6

On suppose que le DDT se décompose dans la nature selon la loi exponentielle en temps t (en années après l'accident):

$$y(t) = C\, e^{-k\,t} \quad , \quad C, k > 0 \qquad \text{de façon que} \qquad \frac{dy}{dt}(t) = -k\, y(t).$$

a) Appliquez le logarithme et utilisez la méthode des moindres carrés pour ajuster le modèle aux données. Estimez les valeurs du C et k. **Réponse**: Appliquer le logarithme au modèle $y(t) = C\, e^{-k\,t}$ donne :

$$\ln(y(t)) = \ln(C\, e^{-k\,t}) = \ln(C) - kt$$

On pose $f(t) = \ln(y(t))$, $a = -k$ et $b = \ln(C)$ et trouve ainsi le modèle

$$f(t) = at + b$$

pour les données

année ap'ès l'accident	t_i	10	20	30	40	50	60
$\ln(y_i)$	$f(t_i)$	4.14	3.66	3.22	2.71	2.30	1.79

Le modèle est, en faite, la droite de regression au données logarithmées.

Les observations (les données) amènent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 10a + b &= 4.14 \\ 20a + b &= 3.66 \\ 30a + b &= 3.22 \\ 40a + b &= 2.71 \\ 50a + b &= 2.30 \\ 60a + b &= 1.79 \end{aligned}$$

En écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 20 & 1 \\ 30 & 1 \\ 40 & 1 \\ 50 & 1 \\ 60 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4.14 \\ 3.66 \\ 3.22 \\ 2.71 \\ 2.30 \\ 1.79 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Les équations normales deviennent:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9100 & 210 \\ 210 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 542.23 \\ 17.82 \end{pmatrix}$$

Solution du problème des moindres carrés: $a = -0.0467$, $b = 4.6064$.

Le modèle avant de logarithmer : $k = -a = 0.0467$ et $C = e^b = e^4.6064 = 100.1231$. Alors

$$y(t) = 100.1231 \cdot e^{-0.0467t}$$

b) Quelle était la concentration du DDT au sol immédiatement après l'accident en 1950?

Réponse:

Extrapolation du modèle pour le temps $t = 0$: $y(0) = 100.1231 \cdot e^{-0.0467 \cdot 0} = 100.1231$.

Immédiatement après l'accident en 1950, la concentration était environ (au sense des moindres carrés) $C = 100.1231$.

c) Estimez le temps de demi–vie du DDT, ie. évaluez (en nombre d'années) le temps nécessaire pour réduire la concentration du polluant à moitié.

Réponse:

En cherche la valeur de $t = \tau$ tel que la concentration $y(\tau)$ est de $C/2$ (la moitié de la concentration au temps $t = 0$). Alors:

$$\begin{aligned}
y(\tau) = C \cdot e^{-k\cdot\tau} &= C/2 \\
e^{-k\cdot\tau} &= 1/2 \\
-k \cdot \tau &= \ln(1/2) \\
\tau &= \frac{-\ln(1/2)}{k} = \frac{\ln(2)}{k} \\
\tau &= 14.8426
\end{aligned}$$

Noter que la demi-vie ne dépend pas de la concentration initiale C.