1. Pour quelles valeurs du paramètre p est-ce que les trois vecteurs suivants sont linéairement indépendants?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Réponse Ils sont linéairement indépendants ssi leur déterminant n'est pas nulle. Avec la méthode de Gauss:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & p \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & p \\ 0 & -8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & p \\ 0 & 0 & -2p-1 \end{vmatrix} = -4(-2p-1) = 4(2p+1) \neq 0.$$

   Alors, ils sont linéairement indépendants ssi $2p+1 \neq 0$, ou $p \neq -1/2$.

   Comme exercise, calculer le déterminant avec la méthode de Laplace, développant par la dernière colonne: det$= -p(-8) + (-1)(-4) = 8p + 4$.

2. Donnée trois vecteurs dans l'éspace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer, que les trois vecteurs sont linéairement dépendants.
   (b) Montrer, que les deux vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont linéairement indépendants.
   (c) Quel est le rang de la matrice avec colonnes égales aux trois vecteurs donnés.

   Réponse

   (a) Le déterminant vaut zéro.
   (Alternativement, on peut calculer la rang par Gauss. Le rang doit être aua plus 2.)
   (b) Les deux vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ ne sont pas colinéaire, alors ils sont linéairement indépendants.
   (c) Le rang de la matrice avec colonnes égales aux trois vecteurs donnés est égal au nombre maximal des colonnes indépendants, alors il vaut 2.