19. Données les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Pour chaqu'une des deux matrices, montrer que les vecteurs de ligne sont linéairement dépendants.
   (b) Pour chaqu'une des deux matrices, décider quelles paires de vecteurs de ligne sont linéairement indépendants.
   (c) Pour chaqu'une des deux matrices, déterminer le rang.

   Réponses

   (c) On commence avec la dernière question. Par algorithme de Gauss on trouve : rang($\boldsymbol{A}$)=2, rang($\boldsymbol{B}$)=1.
   (a) Le rang des matrices est plus petit que le nombre des lignes. Par conséquant, les vecteurs de lignes sont linéairement dépendants.
   (b) Les lignes de la matrice $\boldsymbol{B}$ sont colinéaires (en autres mots: ils sont des multiples un de l'autre), alors toutes les paires sont linéairement dépendantes.
   Pour les colonnes de la matrice $\boldsymbol{A}$ on ne trouve pas deux vecteurs qui sont des multiples, alors toutes les paires sont linéairement indépendantes.

20. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ -4 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Réponses

   Les deux matrices ont le rang 4 (algorithme de Gauss).

21. Répondre aux questions théoriques suivantes :

   (a) L'angle entre les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est de 45°. Est-ce que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants?
   $\boxed{\text{oui, indépendants}}$
   Raison : Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   (b) L'angle entre les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est de 180°. Est-ce que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants?
   $\boxed{\text{non, dépendants}}$
   Raison : Les deux vecteurs ont une direction opposée, alors il sont colinéaires.
   (c) Les angles entre les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont de 45°, 15° et 60°. Est-ce que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants?
   $\boxed{\text{non, dépendants}}$
   Raison : Les trois vecteurs sont coplanaires, parce que $45° + 15° = 60°$.

(d) Est-ce qu'on peut trouver trois vecteurs dans le plan qui sont orthogonaux un à l'autre?

$\boxed{\text{non, c'est impossible}}$

Raison : Trois vecteurs qui sont orthogonaux un à l'autre étaient linéairement indépendants. Mais trois vecteurs dans le plan sont toujours dépendants.

(e) On a deux vecteurs orthogonaux dans l'espace. Est-ce que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants?

$\boxed{\text{oui, indépendants}}$

Raison : Ils ne sont pas colinéaires.