15. Sans Matlab :

Ecrire en forme d'un système des équations linéaires:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Réponses

$$\begin{aligned} -2u - v + 2w &= 5 \\ 3u + v - 3w &= -7 \end{aligned}$$

Gauss :

$$\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -3 & -7 \end{array}$$

Echanger les deux premières colonnes

$$\begin{array}{rrr|r} v & u & w & \\ -1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -3 & -7 \end{array}$$

Additionner la première ligne à la deuxième :

$$\begin{array}{rrr|r} v & u & w & \\ -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}$$

Le rang est de 2, alors il n'y a pas de condition, et il y a une variable libre. On choisit $w = a$ libre.
La deuxième équation dit (attention : on a échangé les colonnes)

$$u - w = -2$$

alors $u = w - 2 = a - 2$. La première équation dit

$$-v = 5 + 2u - 2w$$

alors $v = 2w - 2u - 5 = 2a - 2(a - 2) - 5 = -1$.
L'ensemble des solutions est alors

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; a \in \mathbb{R} \right\}$$

Noter: on ne peut pas choisir la variable v libre.
Dans le schema de Gauss final on peut toujours choisir la variable dans la dernière colonne libre.
b)
Ecrire le système suivant en forme matricielle

$$\begin{aligned} 3a + 9b &= -2 \\ -a + 2b &= 0 \\ -2a - 5b &= 6 \end{aligned}$$

Réponse

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Gauss:

$$\begin{array}{rr|r} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 6 \end{array}$$

Echanger les deux premières lignes :

$$\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & -2 \\ -2 & -5 & 6 \end{array}$$

avec -1 comme pivot :

$$\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \\ 0 & -9 & 6 \end{array}$$

Diviser la troisième ligne par 3 et échanger avec la deuxième ligne

$$\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 15 & -2 \end{array}$$

avec -3 comme pivot :

$$\begin{array}{rr|l} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}$$

Le rang est de 2, alors il y en a une (1) condition. La condition n'est pas satisfait, alors il n'y a pas de solution.

16. En Matlab:

Résoudre le système suivant avec la command matlab "\"

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trouver l'inverse de la matrice des coefficients et la multiplier avec le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ en Matlab.

Comparer le resultat avec la solution du système.

Matlab:

```
A=[
-2 0 0
3 1 0
4 0 -3
];
b=[
4
5
1
];
x=A\b;
```

```
xinverse=inv(A)*b;
disp([x xinverse]);
if x==xinverse
    disp('les deux méthodes donnent le même résultat');
end;
```

17. Données les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 7 & 9 \\ -4 & 0 & -6 & -2 \\ 7 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour les deux matrices répondre aux questions suivantes :

(a) Calculer le rang.

(b) Déterminer le degrée de liberté des solutions (s'ils existent).

(c) Déterminer le nombres des conditions de solvabilité.

Réponses pour la matrice A:

Le système homogène de $\boldsymbol{A}$ consiste de quatre équations $G_1..G_4$:

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & 0 & 5 & 3 & [G1] \\ -3 & 1 & 7 & 9 & [G2] \\ -4 & 0 & -6 & -2 & [G3] \\ 7 & -2 & 10 & 5 & [G4] \end{array}$$

On execute l'alogrithm de Gauss avec le but de produire des zéros dans la colonne 2 :

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & 0 & 5 & 3 & [G1] \\ -3 & 1 & 7 & 9 & [G2] \\ -4 & 0 & -6 & -2 & [G3] \\ 1 & 0 & 24 & 23 & [G4 + 2 * G2] \end{array}$$

Echanger lignes 1 et 2, ainsi qui colonne 1 et 2 :

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -3 & 7 & 9 & [G2] \\ 0 & 2 & 5 & 3 & [G1] \\ 0 & -4 & -6 & -2 & [G3] \\ 0 & 1 & 24 & 23 & [G4] \end{array}$$

Echanger lignes 2 et 4

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -3 & 7 & 9 & [G1] \\ 0 & 1 & 24 & 23 & [G4] \\ 0 & -4 & -6 & -2 & [G3] \\ 0 & 2 & 5 & 3 & [G2 \qquad] \end{array}$$

Opérer avec le pivot ligne 2 colonne 2 :

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -3 & 7 & 9 & [G1] \\ 0 & 1 & 9 & 14 & [G2] \\ 0 & 0 & 90 & 90 & [G3 + 4 * G2] \\ 0 & 0 & -43 & -43 & [G4 - 2 * G2] \end{array}$$

Simplifier les lignes 3 et 4 :

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -3 & 7 & 9 & [G1] \\ 0 & 1 & 9 & 14 & [G2] \\ 0 & 0 & 1 & 1 & [G3/90] \\ 0 & 0 & 1 & 1 & [-G4/43] \end{array}$$

Soustraire ligne 3 de 4 :

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -3 & 7 & 9 & [G1] \\ 0 & 1 & 9 & 14 & [G2] \\ 0 & 0 & 1 & 1 & [G3] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [G4-G3] \end{array}$$

Le rang est alors de 3, le degrée de liberté vaut 1, et il y aura 1 condition de solvabilité.

Réponses pour la matrice $\boldsymbol{B}$:

Le rang est de 3, alors pas de liberté (degrée =0) et pas de condition. Le système aura toujours (n'importe quel vecteur des constantes) exactement une solution.

18. Données trois plans dans l'éspace :

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ \varepsilon_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ \varepsilon_3 : \quad a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array}$$

On sait que le trois plans s'intersectent dans une droite.

Déterminer le rang de *la matrice des coefficients*

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

et le rang de *sa matrice augmentée*

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Réponses:

On sait que la solution du système est une droite. Elle possède, alors, le degrée de liberté 1. Le rang de $\boldsymbol{C}$ est alors 2.

Pour déterminer le rang de la matrice augmentée $\boldsymbol{D}$, on s'imagine qu'on execute l'algorithme de Gauss pour déterminer la solution du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

Parce que le rang vaut 2, le schéma final de Gauss n'a que des zéros (3 zéros en fait) à gauche dans la derniére (la troisième) équation. Autrement dit: la dernière équation constitue une condition :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ 0 & 0 & 0 & d'_3 \end{array}\right]$$

On sait que le système est compatible, c'est-à-dire il admet au moins une solution. Par conséquant, la condition est satisfait est la derniére (la troisième) équation doit avoir un zéro à droite : $d'_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme l'algorithme de Gauss est basé sur des opérations de lignes de la matrice $\boldsymbol{D}$, on voit alors, que le rang de $\boldsymbol{D}$ vaut 2 aussi.