1. Donnés les trois vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits scalaires suivantes:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(b) $(\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (4\vec{c})$

(c) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$

Solution

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 3$

(b) $(\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (4\vec{c}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 48 - 4 = 44$

(c) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 - 17 = -14$

2. (a) Trouver tous (!) les vecteurs dans le plan qui sont orthogonaux au vecteur :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Trouver tous (!) les vecteurs dans l'espace qui sont orthogonaux au vecteur :

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution

(a) Les vecteurs dans le plan sont de la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Il faut que : $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ (produit scalaire égal à zéro).

Nous trouvons:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = -5x - y = 0$$

Isoler y donne $y = -5x$. Les vecteurs recherchés sont alors de la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -5x \end{pmatrix}$$

où x est un nombre réel arbitraire. Plus formelle, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -5\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Les vecteurs dans l'espace sont de la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Il faut que : $\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$ (produit scalaire égal à zéro).
Nous trouvons:

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = 3x + y = 0$$

Isoler y donne $y = -3x$. La troisième coordonnée z n'apparaît pas dans les équations. Elle est, alors, libre et on peut la choisir comme on veut.
Les vecteurs recherchés sont alors de la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ z \end{pmatrix}$$

où x et z sont des nombres réels arbitraires. Plus formelle, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -3\lambda \\ \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Normaliser les vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Exemple:
le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ possède la longueur 3. Le vecteur normalisé est alors $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

Solution

$$\vec{a'} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \qquad \vec{b'} = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x/|\vec{b}| \\ b_y/|\vec{b}| \\ b_z/|\vec{b}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

D'abord on calcule $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, après son longueur $|\vec{c}| = 5$. Finalement

$$\vec{c'} = \frac{1}{|\vec{c}|} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

4. (a) Trouver les angles α, β et γ entre le $\vec{d}$ et les axes (direction positive):

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solution (En degrée et radiands)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \text{angle}(\vec{e_1}, \vec{d}) = \arccos\left(\frac{\vec{e_1} \cdot \vec{d}}{|\vec{e_1}| \cdot |\vec{d}|}\right) = \arccos\left(\frac{d_x}{|\vec{d}|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^o \text{degrée} = \pi/3 \\
\beta &= \text{angle}(\vec{e_2}, \vec{d}) = \arccos\left(\frac{d_y}{|\vec{d}|}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^o = \pi/4 \\
\gamma &= \text{angle}(\vec{e_3}, \vec{d}) = \arccos\left(\frac{d_z}{|\vec{d}|}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = 120^o = 2\pi/3
\end{aligned}$$

(b) Calculer le vecteur que est opposé à $\vec{d}$. **Solution**

$$-\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Trouver les pairs orthogonaux entre les vecteurs suivants

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solution

$$\vec{a} \perp \vec{c} \qquad \vec{b} \perp \vec{c} \qquad \vec{a} \not\perp \vec{b}$$

5. Calculer l'aire du triangle ABC dans le plan, où $A = (-2, 3)$, $B = (-1, -2)$, et $C = (0, 1)$.

   Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$ où $A = (-2, 3)$, $B = (-1, -2)$, $C = (0, 1)$ et $D = (0, 4)$.

   Solution

   L'aire du triangle est égale à la moitié de l'aire du parallelogramme défini par deux vecteurs lateraux du triangle, disons $\vec{BC}$ et $\vec{AC}$.

   On trouve, on écrivant $|...|$ pour la déterminante det(...) :

$$F(ABC) = \frac{1}{2}\left|\vec{BC}\,\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|-8| = 4$$

   Pour l'aire du quadrilatère il faut ajouter

$$F(ACD) = \frac{1}{2}\left|\vec{CD}\,\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|-6| = 3$$

   Alors, $F(ABCD) = 4 + 3 = 7$.