Dr. Rudolf Riedi
HEIA-FR, 2017-18

Intro Recherche Opérationnelle
Série 1

1. Dessiner dans un système de coordonnées les vecteurs

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \underline{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Dessiner dans un système de coordonnées les points

$$A = (4|8) \qquad B = (3|5) \qquad C = (5|6)$$

Indication: Le point A est le point final du vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer les vecteurs de translation suivants:

$$\underline{a} = \overrightarrow{BC} \qquad \underline{b} = \overrightarrow{CA} \qquad \underline{c} = \overrightarrow{AB}$$

Solution:

$$\underline{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.
Solution:

$$a = |\underline{a}| = |\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$b = |\underline{b}| = |\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$c = |\underline{c}| = |\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

(c) Calculer les angles du triangle ABC.
Solution: L'angle chez A est:

$$\alpha = \arg(\overrightarrow{AC}) - \arg(\overrightarrow{AB})$$

Attention à la direction des vecteurs de translation! Les vecteurs doivent commencer en A. Ex: $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$. Alors:

$$\begin{aligned} \arg(\overrightarrow{AC}) &= \arg\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \arctan(-2/1) = \arctan(-2) = -63.4349488^\circ \\ \arg(\overrightarrow{AB}) &= \arg\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \arctan(-3/-1) + 180^\circ = \arctan(3) + 180^\circ = 251.5650512^\circ \end{aligned}$$

et

$$\arg(\overrightarrow{AC}) - \arg(\overrightarrow{AB}) = -63.4349488^\circ - 251.5650512^\circ = -315^\circ$$

Les angles sont toujours modulo 360°. Ici, on ajoute 360°, alors

$$\alpha = -315^\circ + 360^\circ = 45^\circ$$

Parce que les côtés a et b sont égales, les angles α et β le sont aussi. Brèf, $\beta = 45°$ et alors $\gamma = 180° - 45° - 45° = 90°$.
Mais on peut calculer les angles de même manière que α, comme exercice:

$$\beta = \arg(\overrightarrow{BA}) - \arg(\overrightarrow{BC})$$

Attention à la direction des vecteurs de translation! Les vecteurs doivent commencer en B. Alors:

$$\begin{aligned} \arg(\overrightarrow{BA}) &= \arg\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \arctan(3/1) = \arctan(3) = 71.5650512° \\ \arg(\overrightarrow{BC}) &= \arg\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \arctan(1/2) = \arctan(0.5) = 26.5650512° \end{aligned}$$

et

$$\beta = \arg(\overrightarrow{BA}) - \arg(\overrightarrow{BC}) = 71.5650512° - 26.5650512° = 45°$$

Noter, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposé, leurs arguments diffèrent de 180° exactement.

(d) Donner une liste des propriétés spéciales du ce triangle.
Solution: Il est rectangulaire (angle droite en C) et isocèle (a=b).

(e) Calculer l'aire de ce triangle.
Solution: Parce que le triangle est rectangulaire, l'aire vaut simplement $1/2 \cdot ab = 5/2$.

3. Donner le vecteur

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

.

(a) Calculer la longueur et l'argument du vecteur $\underline{v}$.
Solution:

$$|\underline{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

$$\arg(\underline{v}) = \arctan(8/6) = \arctan(4/3) = 53.1301024°$$

(b) Trouver un vecteur $\underline{w}$ de même longueur que le vecteur $\underline{v}$, qui est orthogonal au vecteur $\underline{v}$.
Indication: Ajouter 90° à l'argument de $\underline{v}$.
Solution: La longueur de $\underline{w}$ et $r = 10$, son argument vaut $\alpha = 53.1301024° + 90° = 143.1301024°$.
Alors, les coordonnées du vecteur $\underline{w}$ sont données par

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(143.1301024°) \\ 10 \cdot \sin(143.1301024°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5.999'999'99 \end{pmatrix}$$

Le vecteur qu'on cherche est alors $\underline{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4. Donnés les vecteurs

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $6\underline{u} - 5\underline{v} + \underline{w}$.
Solution:

$$6\underline{u} - 5\underline{v} + \underline{w} = 6\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -50 \end{pmatrix}$$

(b) Trouver le vecteur $\underline{x}$ tel que

$$2\underline{u} - \underline{v} + \underline{x} = 7\underline{x} + \underline{w}$$

Solution: On soustrait $\underline{w}$ des deux côtés de l'équation et obtient

$$2\underline{u} - \underline{v} - \underline{w} + \underline{x} = 7\underline{x}$$

On soustrait $\underline{x}$ des deux côtés de l'équation et obtient

$$2\underline{u} - \underline{v} - \underline{w} = 6\underline{x}$$

On simplifie la côté gauche (inserer les valeurs des vecteurs donnés):

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 4 + 2 \\ 2 \cdot (-1) - 8 + 4 \end{pmatrix} = 6\underline{x} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = 6\underline{x}$$

Division par 6 donne

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{x}$$

Le vecteur qu'on cherche est alors $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. Normaliser un vecteur veut dire de garder sa direction (son argument) et de changer sa longueur à 1. Example: Normaliser le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ amène à $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$.

   Normaliser les deux vecteurs suivants:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

   Calculer aussi la somme $\underline{s}$ des deux vecteur et constater, qui ce n'st pas la même chose que la somme des vecteurs normalisés.

   Solution: Les longueurs sont

$$\begin{aligned} |\underline{u}| &= \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5} \\ |\underline{v}| &= \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \\ |\underline{s}| &= \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

   Les vecteurs normalisés sont alors

$$\frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \underline{s} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

   Clairement, la somme des premiers deux vecteurs normalisés est zéro, comme ils sont juste opposés. Mais la normalisation de la somme n'est pas zéro.

6. Quelle force $\vec{R}$ annule les trois forces suivantes

$$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 200 \\ 110 \\ -50 \end{pmatrix} \quad \vec{F_2} = \begin{pmatrix} -10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \vec{F_3} = -\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

   Solution

$$\vec{R} = -\vec{F_1} - \vec{F_2} - \vec{F_3} = \begin{pmatrix} -160 \\ -90 \\ 50 \end{pmatrix}$$