Dr. Rudolf Riedi
HEIA-FR, 2017-18

Intro Recherche Opérationnelle
Préparation Test 1: Corrigé

Matériaux autorisés : 4 pages (A4) de notes, un formulaire

Répondre directement sur cette feuille

Dans les questions à choix multiplies, marquer les boîtes CORRECTES avec un signe (toujours le même signe).

---

1. (2 points) Données trois vecteurs $\vec{a} = (3, -4, -10)$, $\vec{b} = (-2, 1, -1)$ et $\vec{c} = (-7, -11, 3)$. Trouver les vecteurs orthogonaux

   $\boxed{\vec{a} \text{ orthogonal à } \vec{b}}$ $\boxed{\vec{a} \text{ orthogonal à } \vec{c}}$ $\boxed{\vec{b} \text{ orthogonal à } \vec{c}}$

   Réponses:

   On calcule le produit scalaire de deux vecteurs. S'il vaut zéro, les deux vecteurs sont orthogonaux. Par exemple, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 + (-10) \cdot (-1) = -6 - 4 + 10 = 0$.

   $\boxed{\mathbf{X}\ \vec{a} \text{ orthogonal à } \vec{b}}$ $\boxed{\vec{a} \text{ orthogonal à } \vec{c}}$ $\boxed{\mathbf{X}\ \vec{b} \text{ orthogonal à } \vec{c}}$

2. Donnée le triangle ABC où $A = (5, 1)$ $B = (2, -3)$ et $C = (0, 1)$.

   (a) (1 points) Calculer la longueur de $\vec{c} = \vec{AB}$.

   (b) (2 points) Calculer le point du milieu M du côté $\vec{c} = \vec{AB}$.,

   (c) (2 points) Calculer l'aire du triangle.

   (d) (2 points) Trouver la distance du point C de la droite h qui passe par A et B.

   Réponses: $|\vec{c}| = 5$, $M = (3.5, -1)$, aire 10, distance 4

3. Donnée les plans $\varepsilon_1: \; x+2y+2z=2$ et $\varepsilon_2: \; 2x+y+z=2$.

   (a) (3 points) Calculer la droite d'intersection g des deux plans.

   (b) (3 points) Calculer l'angle d'intersection des deux plans.

   Réponses:

   (a) (3 points) La droite d'intersection g des deux plans est l'ensemble des solutions du système formé par les équations des plans:

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 2 \\ 2x+y+z &= 2 \end{aligned}$$

   Pour trouver la solution, en utilise l'algorithme de Gauss soustraire 2fois la ligne 1 de la ligne 2:

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 2 \\ -3y-3z &= -2 \end{aligned}$$

   On voit que le rang vaut 2. Il y a pas de condition de solvabilité, et il y a une variable libre.
   On pose $z=t$ avec t arbitraire.
   Il en suit de la deuxième ligne que $3y=2-3z=2-3t$, alors $y=2/3-t$.
   Il en suit de la première ligne que $x=2-2y-2z=2-2(2/3-t)-2t=2/3$.
   En sommaire, l'ensemble de solution est

$$\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

   (b) (3 points) L'angle d'intersection des deux plans se calcule comme l'angle entre les deux vecteurs normaux sur les plans, qui sont $(1,2,2)$ et $(2,1,1)$. Alors, l'angle est

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\big((1,2,2)\cdot(2,1,1)/\sqrt{1+4+4}\sqrt{4+1+1}\big) \\ &= \arccos\Big(6/(\sqrt{9}\sqrt{6})\Big) \\ &= \arccos\Big(2/\sqrt{6}\Big) \end{aligned}$$

   [Cette forme du résultat suffit.]

4. (3 points) Donnée les matrices suivantes

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quelles de ces matrices possèdent un rang plein (rang=2)? $\boxed{\boldsymbol{A}}$ $\boxed{\boldsymbol{B}}$ $\boxed{\boldsymbol{C}}$

Réponses:

Le rang d'une matrice 2x2 est plein si le deux vecteurs de colonne sont indépendants, alors, s'ils ne sont pas des multiples un de l'autre. On voit rapidement :

$\boxed{\boldsymbol{A}}$ $\boxed{\text{X } \boldsymbol{B}}$ $\boxed{\text{X } \boldsymbol{C}}$

5. (4 points)

Calculer le rang de la matrice $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse: 3

D'abord, on peut simplifier la tâche en créant des chiffres zéroes. Par exemple, on utilise la dernière ligne:

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 2 & -1 & 1 & \quad (1) \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \quad (2)-(5) \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \quad (3) \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \quad (4)-2*(5) \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \quad (5) \end{array}$$

On peut profiter des zéroes en échangant les lignes 2 et 4 ainsi que les colonnes 2 et 4. Pour le rang, çela ne change rien. On obtient

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 2 & -1 & 1 & \quad (1) \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \quad (4) \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \quad (3) \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \quad (2) \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \quad (5) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & 2 & \quad (1) \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \quad (2) \\ 1 & 0 & 2 & -3 & \quad (3) \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \quad (4) \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \quad (5) \end{array}$$

Maintenant, on commence Gauss et utilise la première ligne ...et la deuxième ligne:

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & 2 & \quad (1) \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \quad (2) \\ 0 & -1 & 3 & -5 & \quad (3)-(1) \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \quad (4) \\ 0 & -1 & 3 & -3 & \quad (5)-2*(1) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & 2 & \quad (1) \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \quad (2) \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \quad (3)+(2) \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \quad (4) \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \quad (5)+(2) \end{array}$$

Finalement, on divise la troisième ligne par -4 et on l'utilise ensuite pour obtenir:

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -1 & 2 & \quad (1) \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \quad (2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \quad -1/4*(3)=(3') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \quad (4)+2*(3') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \quad (5)+2*(3') \end{array}$$

Ceci est le schema final de Gauss. Le rang vaut 3.

6. (6 points)

Déterminer l'ensemble des solutions

(a) (3 points)

$$\left| \begin{array}{rcr} 3x_1 + \ x_2 & = & 4 \\ 6x_1 - 2x_2 & = & 8 \end{array} \right|$$

Réponse: $x_1 = 4/3, x_2 = 0$

(b) (3 points)

$$\left| \begin{array}{rcr} 3x_1 + \ x_2 & = & 4 \\ 6x_1 + 2x_2 & = & 8 \end{array} \right|$$

Réponse: $x_1 = 4/3 - t/3, x_2 = t$, t arbitraire