Intro Recherche Opérationnelle
Série 10

1. Pour les systèmes suivants comparer la solution numérique donnée par la commande A\y en Matlab à la solution mathématique (précise). Noter que certaines des systèmes sont sous-déterminés.

   (a)
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \end{array}$$

   (c)
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

   (d)
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}$$

2. Voici un code Matlab qui calcule la meilleure parabole (dans le sense des moindres carrées) qui passe par les points avec coordonnées $(p(i), q(i))$ stockées dans les vecteurs p et q.

   Plus précisement, il calcule les paramètres a, b et c de la fonction approximante $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Cette fonction est optimale dans le sense des moindres carrées. C'est-à-dire, si on prédit $q(i)$ comme étant $f(p_i)$, les erreurs $\varepsilon(i)$ qu'on fait dans cette prédiction:
$$f(p(i)) = q(i) + \varepsilon(i)$$
   sont minimal, plus précisement, la somme des carrées de ces erreurs :
$$|\varepsilon|^2 = \varepsilon(1)^2 + \varepsilon(2)^2 + \dots$$
   est minimale.

   Le code calcule ces erreurs et les affiche dans la fenêtre de commande. Si $\varepsilon(i)$ est positive, alors la fonction passe au dessus du point $(p(i), q(i))$ en distance horizontale de $\varepsilon(i)$. Similaire pour des $\varepsilon(i)$ négatives. Attention: les points ne sont pas nécéssairement arrangés en ordre de gauche à droite.

   Finalement, le code dessine une figure qui montre les points données $(p(i), q(i))$ ainsi que la fonction approximante.

```
p=[1 3 -1 -2]';
q=[3 2 3 1]';

M=[ p.^2 p ones(length(p),1) ];

A=M'*M;
v=M'*q;
sol=inv(A)*v;

a=sol(1);
b=sol(2);
c=sol(3);

errors=M*sol-q;
disp(errors)

x=min(p)-1:0.01:max(p)+1;

figure(1)
hold off
plot(p,q,'o')
hold on
plot(x,a*x.^2+b*x+c)
axis([min(p)-1 max(p)+1 min(q)-1 max(q)+1 ])
legend('Données','fonction approximante')
title('Régression linéaire')
```

Faire les changements suivants au code :

(a) Utiliser la commande `M\q` afin de calculer a, b et c et stocker les valeurs calculées dans `sol2`. Comparer `sol` et `sol2`. Est-ce qu'ils sont égales? Si non, quelle est la grandeur de leur difference?

(b) Quelles commandes est-ce qu'on peut enlever/remplacer si on utilise `M\q` ?

(c) Remplacer la fonction approximante $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ par $y = f(x) = ax + b$ et adapter le code tel qu'il calcule maintenant les paramètres a et b de cette droite approximante. Adapter aussi l'affichage dans la figure à cette approximation par une droite.

(d) Remplacer la fonction approximante $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ par $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et adapter le code tel qu'il calcule maintenant les paramètres a, b, c et d de cette parabole cubique. Adapter aussi l'affichage dans la figure à cette approximation par une fonction cubique. Commenter sur la taille des erreurs.

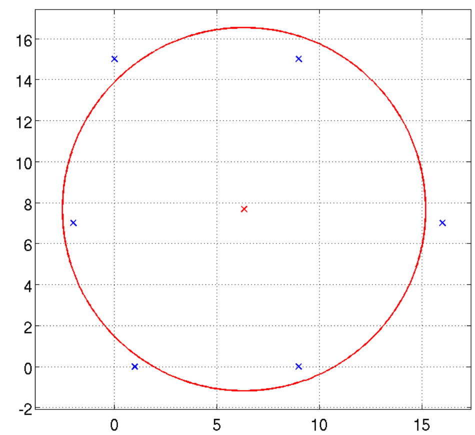
3. (a) On applique la méthode des moindres carrés à un système sur-déterminé et à rang plein, mais compatible. Est-ce qu'on va obtenir la bonne solution même avec la méthode des moindres carrés? Ou est-ce qu'on peut rencontrer des problèmes?

   (b) On applique la méthode des moindres carrés à un système sur-déterminé et incompatible, mais rang non-plein. Est-ce qu'on va obtenir la bonne solution même avec la méthode des moindres carrés? Ou est-ce qu'on peut rencontrer des problèmes?

4. Placement d'un émitteur.
   Cherchons un cercle centré en (a, b) de rayon r, ie.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

   qui rélie au mieux $n = 6$ points en 2D aux coordonnées cartésiennes (x_i, y_i):



x_i	16	9	0	-2	1	9
y_i	7	15	15	7	0	0

   Pour pouvoir utiliser la méthode des moindres carrés, il faut d'abord retravailler l'équation du cercle en un système linéaire pour les inconnues.

   L'équation du cercle (voir en haut) peut être écrit comme:

$$2\,x\,a + 2\,y\,b + \underbrace{r^2 - a^2 - b^2}_{c} = x^2 + y^2.$$

   Par la substitution $c = r^2 - a^2 - b^2$ on a *linéarisé* notre problème (on s'est débarrassé des termes quadratique des inconnus : a^2 et b^2, et les remplacés par c). Pour les points (x_i, y_i) donnés, il faut trouver les meilleurs a, b et c de façon que

$$\begin{pmatrix} 2\,x_1 & 2\,y_1 & 1 \\ 2\,x_2 & 2\,y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\,x_n & 2\,y_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix}$$

   au sens des moindres carrés.

   a) Calculez a, b et c par la méthode des moindres carrés.

   b) Calculez le rayon $r = \sqrt{c + a^2 + b^2}$ du cercle d'approximation.