Dr. Rudolf Riedi
HTA-FR, 2019-20

Analysis 1
Lösungen 2

Wir schreiben $\mathbb{I}_f$ für den Wertebereich einer Funktion f.

1. Finden Sie den grösstmöglichen Definitionsbereich und Wertebereich, so dass die Funktion eine Inverse besitzt. Berechnen Sie die inverse Funktion.

   Beispiel: $f(x) = x^2 - x$ Lösung:
   domaine $\mathbb{D}_f = [1/2, \infty[$, image $\mathbb{I}_f = [-1/4, \infty[$, inverse $f^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{1+4y}}{2} : [-1/4, \infty[\to [1/2, \infty[$.

   (a) $f(x) = |x|$
   (b) $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$
   (c) $f(x) = \sin(\sqrt{1+x})$
   (d) $f(x) = \sqrt{1+\sin(x)}$

   Lösung

   (a) $f(x) = |x|$ Der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ergibt den Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$. Die Funktion ist allerdings nicht ein-eindeutig.
   Reduktion des Definitionsbereiches:

   $$f:\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x$$

   Mit diesem Definitionsbereich ist die Funktion invertierbar (umkehrbar) und es gilt $f(x) = |x| = x$. Also ist die Inverse $f^{-1}(y) = y$.
   Man könnte den Definitionsbereich auch wie folgt reduzieren:

   $$f:\ \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto -x$$

   Mit diesem Definitionsbereich ist die Funktion ebenfalls invertierbar aber es gilt jetzt $f(x) = |x| = -x$. Also ist die Inverse $f^{-1}(y) = -y$.

   (b) $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$
   Auf den ersten Blick ist der Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, um eine Division durch Null zu vermeiden. Bevor wir fortfahren, vereinfachen wir:

   $$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{1+x}$$

   Während auf den ersten Blick der Wert von $f(1)$ von der Form $0/0$ ist, also undefiniert, sieht man nun auf den zweiten Blick, mit der Vereinfachung, dass $f(1) = 1/(1+1) = 0.5$ ein sinnvoller Wert ist. Wir werden später in der Theorie sehen, wie solche "sinnvollen" Werte systematisch durch Limes Berechnungen gefunden werden können. Im Moment sind wir zufrieden, den Definitionsbereich auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ zu erweitern mittels

   $$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

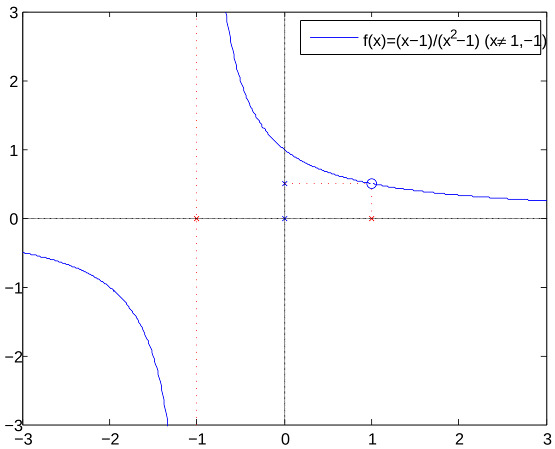
   Man nennt dies eine stetige Erweiterung der Funktion f. Wir arbeiten für den Rest der Aufgabe mit dieser Erweiterung. Also $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Um nun das Bild von f zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Inverse.
   Wir lösen die Gleichung $y = 1/(1+x)$ nach x auf und finden

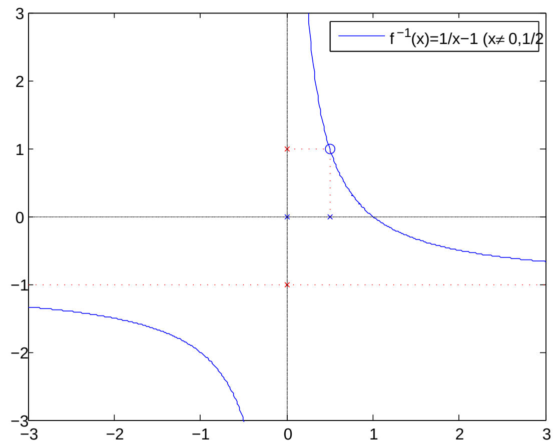
   $$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1$$

   für alle y ausser $y = 0$. Daraus schliesst man, dass 0 nicht im Bild von f liegt.

Nun suchen wir den Wert von y, der dem verbotenen Wert $x = -1$ entspricht. Wir lösen also $-1 = \frac{1}{y} - 1$ nach y auf und finden keine Lösung. Das verbotene $x = -1$ erzeugt also keinen verbotenen y Wert.

Zusammenfassend ist also nur der Wert $y = 0$ unmöglich und $\mathbb{I}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.





(c) $f(x) = y = \sin(\sqrt{1+x})$: dies ist eine zusammengesetzte Funktion der Form $f(x) = g(h(k(x)))$.
Also allererstes bemerken wir, dass y als Sinus-Wert immer in $[-1, 1]$ liegen muss. Der Definitionsbereich der Inversen kann also allerhöchstens $[-1, 1]$ betragen.

Wir bemerken ausserdem, dass x mindestens -1 betragen muss, damit die Wurzel gezogen werden kann. Der Definitionsbereich der Funktion f selbst, kann also allerhöchstens $[-1, \infty[$ betragen.

Die Inverse berechnet sich aus $y = \sin(\sqrt{1+x})$ durch schrittweises Auflösen nach x:

$$\arcsin(y) = \sqrt{1+x}$$

Beachten Sie: die Gleichung hätte weitere Lösungen, nämlich

$$\pi - \arcsin(y) = \sqrt{1+x}$$

und wir können Vielfache von $2 * \pi$ addieren. Doch wir sind hier nicht dabei, alle Lösungen einer Gleichung zu finden, sondern nur EINE, und zwar die Einfachste. Wir suchen die Inverse Funktion, nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Beachten Sie ausserdem: Die Wurzel ist immer positiv, also muss $\arcsin(y)$ positiv sein. Das bedeutet, dass y in $[0, 1]$ liegen muss. Dies ist eine weitere Einschränkung des Definitionsbereichs der Inversen.

Weiter:

$$(\arcsin(y))^2 = 1 + x$$

Wir bemerken, dass $(\arcsin(y))^2$ immer zwischen 0 und $\frac{\pi^2}{4}$ liegt. Also muss x zwischen -1 und $\frac{\pi^2}{4} - 1$ liegen.

Der letzte Schritt ergibt

$$x = \arcsin^2(y) - 1.$$

Als Einschränkungen haben wir für x gerade den Definitionsbereich von f:

$$\mathbb{D}_f = [-1, \frac{\pi^2}{4} - 1]$$

und für y gerade das Bild von f:

$$\mathbb{I}_f = [0, 1].$$

Wir kontrollieren, ob wir nichts übersehen haben. Wir gehen dabei schrittweise durch die Zusammensetzung und gehen vom Definitionsbereich aus, den wir gefunden haben.

Nennen wir das erste Zwischenresultat u. Zuerst wird also die Abbildung $x \mapsto u = k(x) = 1 + x$ ausgeführt. Der Output u dieser Abbildung ist genau eins grösser als der Input. Ausgehend von $\mathbb{D}_f$ von oben, erhalten also wir als Bild nach dieser ersten Etappe

$$u \in [0, \frac{\pi^2}{4}].$$

Nennen wir das zweite Zwischenresultat v. Als zweites wird die Abbildung $u \mapsto v = h(u) = \sqrt{u}$ ausgeführt. Das kleinste u, das auftreten kann, ist $u = 0$ mit Output-Wert $v = 0$. Das grösste u, das auftreten kann, ist $u = \frac{\pi^2}{4}$ mit Output-Wert $v = \frac{\pi}{2}$. Ausserdem ist die zweite Abbildung, also die Wurzel, monoton. Das bedeutet, dass alle anderen Output-Werte zwischen dem kleinsten und dem grössten liegen. Zusammenfassend, der Output v dieser zweiten Abbildung liegt immer zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und alle diese Werte werden angenommen. Wir erhalten als Bild nach dieser zweiten Etappe

$$v \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Als drittes und letztes wird die Abbildung $v \mapsto y = g(v) = \sin(v)$ ausgeführt. Das kleinste v, das auftreten kann, ist $v = 0$ mit Output-Wert $y = 0$. Das grösste v, das auftreten kann, ist $v = \frac{\pi}{2}$ mit Output-Wert $y = 1$. Ausserdem ist die dritte Abbildung, also der Sinus, monoton im Intervall der Werte von v. Das bedeutet, dass alle anderen Output-Werte zwischen dem kleinsten und dem grössten liegen. Zusammenfassend, der Output y dieser dritten Abbildung liegt immer zwischen 0 und 1 und alle diese Werte werden angenommen.
Wir erhalten als Bild nach dieser dritten und letzten Etappe das Bild von f

$$\mathbb{I}_f = [0, 1].$$

Alles stimmt.

(d) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$: Ähnlich findet man $\mathbb{D}_f = [-\pi/2, \pi/2]$, $\mathbb{I}_f = [0, \sqrt{2}]$, $f^{-1}(y) = \arcsin(y^2 - 1)$.

2. Trouvez les x qui satisfont les equations suivantes dans les intervals indiqués.

   (a) $\sin(x) = -1/2$ sur $[0, 2\pi[$
   Réponse L'arcsin donne la solution entre $-\pi/2$ et $\pi/2$: $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$. Cette valeur est negative, alors dehors l'intervalle désiré. Par périodicité on trouve la solution $x_1 = 2\pi + \arcsin(-1/2) = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$. Par symetrie en trouve la deuxième solution $x_2 = \pi - \arcsin(-1/2) = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$.

   (b) $\sin(x)\cos(x) = \sqrt{3}/4$ sur $[0, \pi/2[$
   Réponse On simplifie d'abord et trouve $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. L'équation devient, alors: $\sin(2x) = \sqrt{3}/2$. Pour éviter de faire des gaffes, on écrit $\phi = 2x$.
   L'arcsin donne la solution à l'équation $\sin(\phi) = \sqrt{3}/2$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$: $\phi_1 = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$. Alors, $x_1 = \pi/6$. Par symetrie du sinus, on trouve d'autre ϕ comme solution: $\phi_2 = \pi - \phi_1 = 2\pi/3$, $\phi_3 = 2\pi + \phi_1 = 7\pi/3$, $\phi_4 = 3\pi - \phi_1 = 8\pi/3$, $\phi_5 = 4\pi + \phi_1 = 13\pi/3$ etc. En divisant par 2, on trouve les valeurs correspondants de x: $x_2 = \pi/3$, $x_3 = 7\pi/6$, $x_4 = 4\pi/3$. Le prochaine candidate est $13\pi/6$ qui est déjà dehors l'interval désiré.

3. Tracez les graphes suivants:

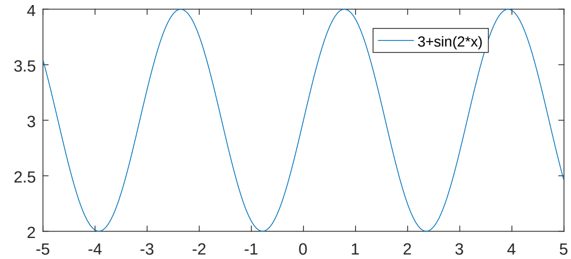
   (a) $y = g(x) = 3 + \sin(2x)$

   (b) $y = f(x) = 2\arctan(x/2)$ (indiquez au moins trois points avec leurs coordinates precises sur le graphe, et l'image $\mathbb{I}_f$ de la fonction)

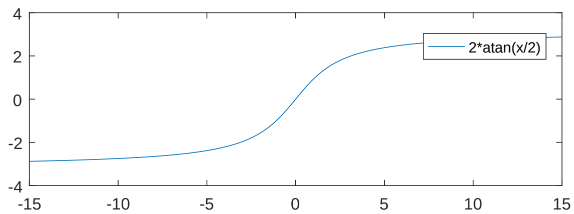
   (c) $y = h(x) = \sin(\arccos(x))$ (simplifiez d'abort!)

Solution Utiliser votre outil numérique préfré pour contrôler les graphes. Code matlab:

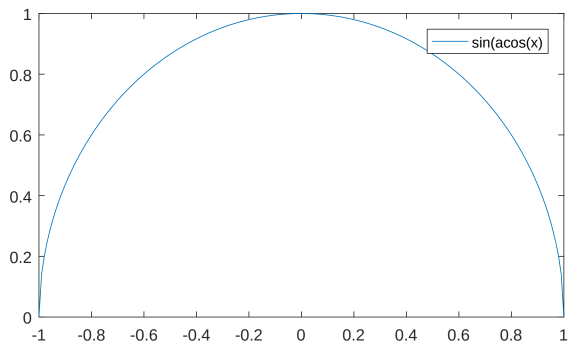
x=linspace(-5,5,201); a=3+sin(2*x); figure(1) plot(x,a); legend('3+sin(2*x)');



x=linspace(-15,15,201); b=2*atan(x/2); figure(2) plot(x,b); legend('2*atan(x/2)');



x=linspace(-1,1,201); c=sin(acos(x)); figure(3) plot(x,c); legend('sin(acos(x)');



Points interssants:

pour g: $(0,3)$, $(\pi/4,4)$, $(\pi/2,3)$, $(3\pi/4,2)$, $(\pi,3)$

pour f: $(0,0)$, $(\pi/2,2)$, $(-\pi/2,-2)$

pour h: $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

La simplification pour h est:

$$h(x) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

Pour décider quelle signe de la racine il faut prendre on calcule d'abord l'image de la fonction. On commence par le domaine de la fonction intérieure $\arccos(x)$, qui est $[-1,1]$ avec image $[0,\pi]$. On prenant l'image de la fonction intérieure comme domaine de la fonction extérieure $\sin(x)$ on trouve l'image de la fonction composée h comme l'image de $\sin(x)$ sur $[0,\pi]$, donc $[0,1]$. Brèf, h prend que des valeurs positives. Alors, il faut prendre le signe positive pour la racine.

4. Trouvez la valeur exacte sans calculatrice. (utilisez radiant pour les angles)

   Example: $\arcsin(\sqrt{2}/2)$ Solution: $\pi/4$

   Note: C'est pas la même question que: trouvez tous x en $[0,2\pi[$ tel que $\sin(x) = \sqrt{2}/2$, d'où la solution est: $x_1 = \pi/4$, $x_2 = 3\pi/4$.

   (a) $\sin(\arccos(1/2))$

(b) $\sin(2\arccos(1/2))$

(c) $\arccos(\sin(\pi/3))$

(d) $\cos(\arctan(1))$

Solution

(a) Parce que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$ en trouve $\sin(\arccos(1/2)) = \sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$

Alternativement on calcule directement: $\arccos(1/2) = \pi/3$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

(b) Parce que $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$ on trouve

$$\sin(2\arccos(\frac{1}{2})) = 2\sin(\arccos(\frac{1}{2}))\cos(\arccos(\frac{1}{2})) = 2\cdot\sqrt{3}/2\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}/2$$

(c) $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, alors $\arccos(\sin(\pi/3)) = \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$

La formule generale est: $\arccos(\sin(\phi) = \pi/2 - \phi$, parce que $\arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x)$.

(d) $\cos(\arctan(1)) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

Zusammenstellung der elementaren Gleichungen

Dies sind Gleichungen, die man durch Rechnung lösen kann. Mit anderen Worten, man kann die Lösung mittels einer Formel schreiben.
(Für die interessierten Leser: Die Lösungsformeln sind gerade die Inversen Funktionen der Ausgangsfunktion. Falls mehrere Lösungen existieren, so entsprechen diese den verschiedenen Inversen Funktionen, die man durch die verschiedenen Einschränkungen des Definitionsbereichs erhält.)

- Linear: $f(x) = ax + b = y$ $(a \neq 0)$ für $y \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$

  Lösung:
  $$x = (y - b)/a \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

- Quadratisch: $x^2 = y$ für $y \in \mathbb{I} = \mathbb{R}_0^+$

  1. Lösung:
  $$x = \sqrt{y} \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_1 = \mathbb{R}_0^+$$
  2. Lösung:
  $$x = -\sqrt{y} \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_2 = \mathbb{R}_0^-$$

- Allgemein Quadratisch: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

  Falls $b^2 - 4ac < 0$: keine Lösung. Sonst:

  1. Lösung:
  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_1 = [-b/(2a), \infty[$$
  2. Lösung:
  $$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_2 =]-\infty, -b/(2a)]$$

- Trigonometrisch

  - $f(x) = \sin(x) = y$ für $y \in \mathbb{I} = [-1, 1]$

    1. Lösung:
    $$x = \arcsin(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_1 = [-\pi/2, \pi/2]$$
    2. Lösung:
    $$x = \pi - \arcsin(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_2 = [\pi/2, 3\pi/2]$$
    Weitere Lösungen: Vielfache von 2π addieren, also $360°$.

  - $f(x) = \cos(x) = y$ für $y \in \mathbb{I} = [-1, 1]$

    1. Lösung:
    $$x = \arccos(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_1 = [0, \pi]$$
    2. Lösung:
    $$x = -\arccos(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_2 = [-\pi, 0]$$
    Weitere Lösungen: Vielfache von 2π addieren, also $360°$.

  - $f(x) = \tan(x) = y$ für $y \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$

    1. Lösung:
    $$x = \arctan(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_1 = [-\pi/2, \pi/2[$$
    Weitere Lösungen: Vielfache von π addieren, also $180°$.

- Betrag: $f(x) = |x| = y$ für $y \in \mathbb{I} = \mathbb{R}_0^+$

  1. Lösung:
  $$x = y \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_1 = \mathbb{R}_0^+$$
  2. Lösung:
  $$x = -y \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D}_2 = \mathbb{R}_0^-$$

- Exponentiell: $e^x = y$ für $y \in \mathbb{I} = \mathbb{R}_0^+$

  Lösung:
$$x = \ln(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

- Inverse Funktionen der obigen Funktionen: Als Inverse Funktionen sind sie eindeutig und die entsprechenden Gleichung besitzen nur eine Lösung.
  - $f(x) = \sqrt{x} = y$ für $y \in \mathbb{I} = \mathbb{R}_0^+$

    Lösung
$$x = y^2 \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$$
  - $f(x) = \arcsin(x) = y$ für $y \in \mathbb{I} = [-\pi/2, \pi/2]$

    Lösung
$$x = \sin(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D} = [-1, 1]$$
  - $f(x) = \arccos(x) = y$ für $y \in \mathbb{I} = [0, \pi]$

    Lösung
$$x = \cos(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D} = [-1, 1]$$
  - $f(x) = \arctan(x) = y$ für $y \in \mathbb{I} = [-\pi/2, \pi/2]$

    Lösung
$$x = \tan(y) \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$$
  - $f(x) = \ln(x) = y$ für $y \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$

    Lösung:
$$x = e^y \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$$

- Rationale Funktionen ersten Grades: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = y$

  Hier ist der Definitionsbereich schnell zu erkennen: $x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-d/c\}$.

  Schrittweises Auflösen nach x:
$$\begin{aligned} ax + b &= y(cx + d) \\ ax + b &= ycx + yd \\ ax - ycx &= yd - b \\ x(a - yc) &= yd - b \\ x &= \frac{yd - b}{-yc + a} \end{aligned}$$

  Wir sehen nun, dass eine eindeutige Beziehung besteht zwischen x und y ausser für $x = -d/c$ (wie bereits bemerkt) und $y = a/c$ (aus dem Definitionsbereich der Inversen Funktion.

  Also, die Funktion f und Ihre Inverse sind::
$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad x = \frac{yd-b}{-yc+a} \qquad x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-d/c\} \quad y \in \mathbb{I}_f = \mathbb{R}\backslash\{a/c\}$$

- Zusammensetzungen

  Beispiel
$$\sin|x| = 1/2$$

  1. Schritt: Auflösen von sin ergibt
$$|x| = \arcsin(1/2) + 2k\pi \quad \text{oder} \quad |x| = \pi - \arcsin(1/2) + 2k\pi$$

  Die weiteren Lösungen durch Addieren von Vielfachen von 2π, also von $360°$, sind bereits notiert. Wegen $\arcsin(1/2) = \pi/6$ ergibt sich
$$|x| = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{oder} \quad |x| = 5\pi/6 + 2k\pi$$

In Grad:

$$|x| = 30^\circ + k360^\circ \quad \text{oder} \quad |x| = 150^\circ + k360^\circ$$

2. Schritt: Auflösen von $|.|$ ergibt

$$x = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = 5\pi/6 + 2k\pi$$

und

$$x = -\pi/6 - 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = -5\pi/6 - 2k\pi$$

Sammeln der Lösungen ergibt

$$x_1 = -5\pi/6 \quad x_2 = -\pi/6 \quad x_3 = \pi/6 \quad x_4 = 5\pi/6$$

Plus Vielfache von 2π.

In Grad: $-150^\circ, -30^\circ, 30^\circ, 150^\circ$ plus Vielfache von 360°.

Weiteres Beispiel siehe Aufgabe 1c oben

Alle anderen Gleichungen können nicht elementar, also durch eine Formel gelöst werden.

Beispiele von nicht elementar lösbaren Gleichungen sind:

$$x + \sin(x) = 5$$

$$x \cdot \sin(x) = 5$$

$$e^x + \sin(x) = 5$$

etc mit $\cos(x)$, $\tan(x)$, 2^x, e^x, $\ln(x)$ anstatt $\sin(x)$ oder höhere Polynome anstatt x. Diese Gleichung können aber numerisch sehr gut gelöst werden. Siehe Newton's Methode später.

Trigonometrische Gleichungen wie

$$\sin(x) + \cos(x) = 1/2$$

oder logarithmische Gleichungen wie

$$\log_3(x) + \log_2(x) = 3$$

zuerst umformen, bis nur noch eine Trigonometrische Funktion, oder nur ein Logarithmus verbleibt.